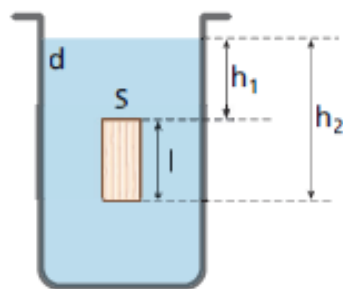


DIMOSTRAZIONE DELLA LEGGE DI ARCHIMEDE

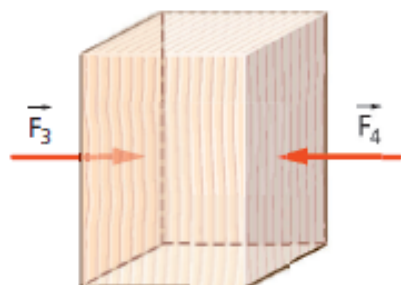


La legge di Archimede è una conseguenza della legge di Pascal e di quella di Stevino.

Consideriamo un blocchetto che ha la forma di un parallelepipedo con base di area S e altezza l . Esso è immerso in un liquido di densità d , con la faccia superiore a profondità h_1 e quella inferiore alla quota $h_2 = l + h_1$.

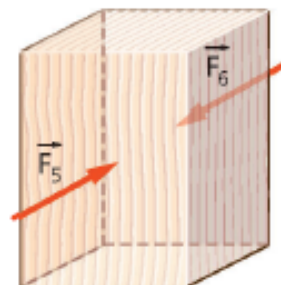
Il peso dell'acqua esercita sulle varie facce del blocchetto una pressione che aumenta con la profondità.

► Le forze che si esercitano sulla faccia di sinistra sono equilibrate dalle corrispondenti forze sulla faccia di destra.



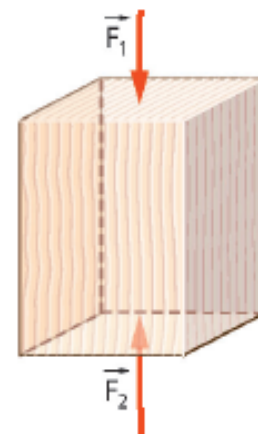
A

► Anche la somma vettoriale delle forze che si esercitano sulla faccia anteriore è uguale alla forza totale sulla faccia posteriore.



B

► È come se, sul blocchetto, agissero soltanto la forza $\vec{F}_1$ sulla faccia superiore e la forza $\vec{F}_2$ su quella inferiore.



C



Quindi, la forza totale $\vec{F}_A$ esercitata dal liquido sul blocchetto è

$$\vec{F}_A = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

Dal momento che la pressione sulla superficie inferiore è maggiore della pressione sulla superficie superiore, il modulo di $\vec{F}_2$ è più grande di quello di $\vec{F}_1$. Quindi la forza totale è una forza verticale, diretta verso l'alto e con un modulo dato da

$$F_A = F_2 - F_1.$$

I valori delle forze $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ sono date dal prodotto dell'area S di una faccia per il valore della pressione alla quota in cui esse si trovano:

$$F_1 = Sp_1 \text{ e } F_2 = Sp_2.$$

A loro volta, le pressioni sono date dalla legge di Stevino:

$$p_1 = p_0 + dgh_1 \text{ e } p_2 = p_0 + dgh_2 = p_0 + dg(h_1 + l).$$

Siamo così in grado di calcolare F_A :

$$\begin{aligned} F_A = F_2 - F_1 &= Sp_2 - Sp_1 = S(p_2 - p_1) = S[p_0 + dgh_1 + dgl - (p_0 + dgh_1)] = \\ &= S[p_0 + dgh_1 + dgl - p_0 - dgh_1] = Sdgl. \end{aligned}$$

Ma il prodotto Sl è uguale al volume V del blocchetto, quindi troviamo la legge di Archimede:

$$F_A = Sdgl = gd(Sl) = gdV.$$

LA VISCOSITÀ

La viscosità è una proprietà dei fluidi che indica la resistenza allo scorrimento.

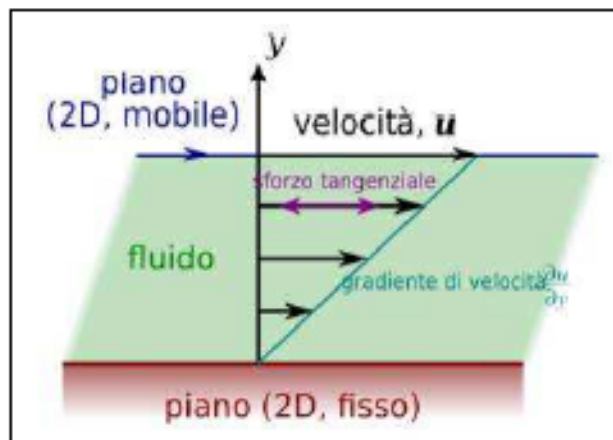
Dipende dal tipo di fluido e dalla temperatura e si indica con la lettera greca eta η .

La viscosità è la misura dell'attrito interno dei fluidi e la sua unità di misura è il Pa-s (o in unità di misura fondamentali del S.I. in $\text{kg}/(\text{m}\cdot\text{s})$)

I fluidi si possono classificare in:

- fluidi ideali $\eta=0$ e $\rho=\text{cost}$ al variare di P (fluidi inviscidi e incompressibili)
- superfluidi $\eta=0$
- fluidi inviscidi o non viscosi $\eta \approx 0$
- fluidi viscosi $\eta \neq 0$

Se schematizziamo il movimento di un fluido a contatto di una superficie piana come lo slittamento delle lamine fluide notiamo che in prossimità del fondo, a causa dell'attrito viscoso, il fluido ha macroscopicamente velocità nulla e la velocità con cui si muovono via via le lamine superiori cresce con la distanza dal fondo.



Sperimentalmente si trova che la forza necessaria per mantenere in moto uno strato di fluido ad una velocità v costante è:

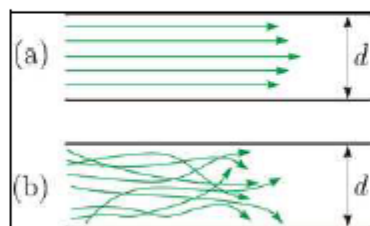
$$F = \eta \frac{Sv}{d}$$

dove S è la superficie, v è la velocità e d la distanza dal fondo.

MOTO LAMINARE E TURBOLENTO

Il moto laminare è un moto ordinato in cui i vettori velocità delle particelle sono paralleli;

il moto turbolento è, invece, caratterizzato da estremo disordine in cui si verifica un persistente mescolamento delle particelle a livello macroscopico con continua variazione del vettore velocità.



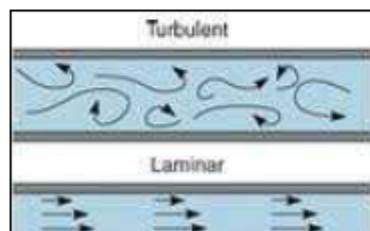
IL NUMERO DI REYNOLDS

Il numero di Re è un gruppo adimensionale.

Fino alla prima metà del XIX secolo gli studiosi di idrodinamica impostavano le loro teorie supponendo che l'acqua fosse un fluido perfetto: inviscido e incompressibile.

Nel 1884 un medico e fisico francese, Poiseuille, dimostrò invece che il moto di un fluido viscoso in uno stesso condotto poteva avere due regimi:

- *regime laminare*: in cui le molecole hanno velocità crescente da zero, per lo strato aderente alle pareti del tubo, al valore massimo in corrispondenza dell'asse
- *regime vorticoso o turbolento*, in cui gli strati liquidi acquistano velocità quasi uguale alla massima, a breve distanza dalle pareti e inoltre si formano all'interno del liquido vortici visibili.



Reynolds ricavò che combinando la velocità media U , con il diametro del tubo D , la densità ρ e la viscosità η in un gruppo adimensionale detto n° di Reynolds

$$Re = \frac{\rho D U}{\eta}$$

si poteva descrivere la dinamica del flusso.

Nella sua interpretazione *dinamica* il numero di Reynolds è il rapporto tra le forze d'inerzia e quelle viscosi, secondo la relazione:

$$Re = \frac{F_i}{F_v}$$

Esso fornisce un indice dell'importanza delle forze d'inerzia rispetto a quelle viscosi.

Ciò vuol dire che, per valori *elevati* del numero di Reynolds, si possono trascurare le forze viscosi perché molto piccole rispetto a quelle d'inerzia; il fluido si comporta da *perfetto*. Viceversa, per

MECCANISMI DI SEDIMENTAZIONE

Utilizzando la tecnica di sedimentazione la forma della particella non costituisce un grosso ostacolo per la determinazione della velocità di sedimentazione mentre non vale la stessa regola per la concentrazione dei solidi sospesi. Le varie particelle presenti in sospensione possono, infatti, influenzare ed ostacolare il moto delle particelle circostanti ed, a loro volta, esserne influenzate. In una situazione di questo genere la velocità di sedimentazione non potrà più essere determinata dalla applicazione del criterio di equilibrio delle forze applicate. Possiamo quindi distinguere due meccanismi:

- ***sedimentazione indipendente;***
- ***sedimentazione di massa.***

Si dirà che una particella sedimenta con un meccanismo di [sedimentazione indipendente](#) se il suo moto non è influenzato dalla presenza di altre particelle e la velocità di sedimentazione è calcolabile imponendo l'equilibrio delle forze agenti [4]

VELOCITA' DI SEDIMENTAZIONE (1)

La **velocità di sedimentazione** è facilmente calcolabile partendo dalla [legge di Stokes](#). [5]

Si osserva che un corpo che cade in un liquido viscoso dopo qualche tempo si muove di moto rettilineo uniforme. Prendiamo in esame una sfera di raggio r e densità ρ che venga lasciata cadere in un liquido viscoso di densità ρ_0 e che stia scendendo in esso con moto rettilineo uniforme. In queste condizioni deve essere necessariamente nulla la risultante delle forze agenti su di essa come vuole il principio d'inerzia. La forza F_1 , diretta verso il basso e causa del moto è equilibrata dalla forza viscosa F che si oppone al moto. F è pertanto diretta verso l'alto e il suo modulo è dato dalla legge di Stokes. Il modulo della risultante (F_1) delle forze agenti sulla particella si può calcolare facilmente osservando che esso è dato dalla differenza tra la forza peso della sferetta

$$mg = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho g$$

e di quella dovuta alla spinta di Archimede, diretta verticalmente verso l'alto ed uguale al peso del liquido spostato:

$$S_A = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_0 g$$

Si ha cioè in modulo:

$$F_1 = mg - S_A = \frac{4}{3} \pi r^3 (\rho - \rho_0) g$$

VELOCITA' DI SEDIMENTAZIONE (2)

Eguagliando la forza di attrito (F) e la forza risultante (F_1) si ottiene:

$$6\pi \eta r v = \frac{4}{3} \pi r^3 (\rho - \rho_0) g$$

da cui si ricava facilmente:

$$v = \frac{2 (\rho - \rho_0) g r^2}{9 \eta}$$

Questa velocità prende il nome di **velocità di sedimentazione**. Essa permette in definitiva di ricavare la velocità con cui sedimenta una sfera di raggio r e densità ρ quando essa cade in un liquido di densità $\rho_0 < \rho$ e coefficiente di viscosità η .

Naturalmente la velocità di sedimentazione appena trattata riguarda le particelle di forma sferica mentre per tutti gli altri tipi di particelle si può utilizzare una formula più generica:

$$v = \frac{(\rho - \rho_0) V g}{f}$$

dove V è il volume della particella ed f è il coefficiente di attrito. [5]

VELOCITA' DI SEDIMENTAZIONE (3)

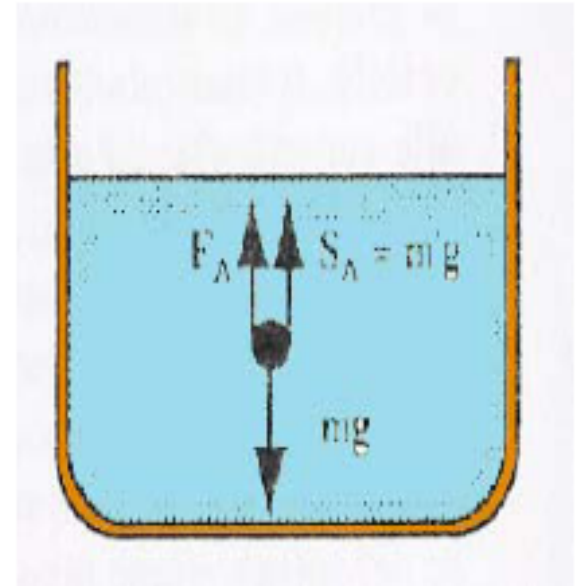
Per calcolare la velocità di sedimentazione è molto importante tener conto della densità delle particelle [6]:

- Se la particella è più densa del fluido (es. il limo che si deposita sul fondo dello stagno) la forza risultante è diretta verso il basso ed ha modulo uguale a quello precedentemente esposto:

$$F_1 = \frac{4}{3} \pi r^3 (\rho - \rho_0) g$$

- Se la particella è meno densa del fluido (es. panna del latte che risale in superficie) essa sarà soggetta ad una forza risultante diretta verso l'alto e avente modulo:

$$F_1 = \frac{4}{3} \pi r^3 (\rho_0 - \rho) g$$



Quali forze agiscono su una sferetta metallica che cade in un fluido?

osservazione sperimentale:

dopo un breve periodo, $\vec{v} = \text{costante}$ [moto rettilineo uniforme]

$$\vec{F}_G + \vec{F}_A + \vec{F}_V = 0$$

Gravità

$$\vec{F}_G = m_{\text{sfera}} \cdot \vec{g}$$

$$= V_{\text{sfera}} \cdot \rho_{\text{sfera}} \cdot \vec{g}$$

$$= \frac{4}{3} \pi \cdot r_{\text{sfera}}^3 \cdot \rho_{\text{sfera}} \cdot \vec{g}$$

Spinta idrostatica (Archimede)

$$\vec{F}_A = -m_{\text{fluido spostato}} \cdot \vec{g}$$

$$= -V_{\text{sfera}} \cdot \rho_{\text{fluido}} \cdot \vec{g}$$

$$= -\frac{4}{3} \pi \cdot r_{\text{sfera}}^3 \cdot \rho_{\text{fluido}} \cdot \vec{g}$$

Attrito del fluido
(Viscosità)

$$\vec{F}_V$$

$$g = 9.80665 \text{ m/s}^2$$

Nel caso delle nostre sfere d'acciaio in caduta nel fluido:

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{TOT}} = \vec{\mathbf{F}}_{\text{G}} + \vec{\mathbf{F}}_{\text{A}} + \vec{\mathbf{F}}_{\text{V}} = \mathbf{0}$$

↙ A regime
v = costante

Assumendo le condizioni per cui è valida la legge di Stokes:

$$\frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \cdot (\rho_S - \rho_F) \cdot \vec{\mathbf{g}} - 6\pi \eta \cdot r \cdot \vec{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$$

Gravità, Spinta di Archimede e il moto agiscono sull'asse verticale



l'equazione vettoriale può ridursi ad una sola equazione
che può essere risolta per trovare la viscosità η .

- La formula per calcolare la forza d'attrito viscoso è: $F_a = 6\pi\eta rV$ quindi l'attrito dipende dalla velocità con cui il corpo si muove nel fluido.
- La densità è la massa per unità di volume ed è una misura della “compattezza” della massa di un corpo o di una sostanza. La densità viene definita mediante la relazione: $\rho = m/v$ (kg/m³).
- La massa è la grandezza fondamentale che esprime la quantità di materia contenuta in un corpo. L'unità di misura SI della massa è il kilogrammo (kg).
- Il volume è la misura dello spazio occupato da un corpo. L'unità di misura SI del volume è il metro cubo (m³).
- La lunghezza è la grandezza fondamentale che esprime le dimensioni nello spazio. L'unità di misura SI della lunghezza è il metro (m).

- La bilancia elettronica di precisione indica immediatamente massa di un corpo con una precisione di 0,01 g.

- Il calibro è uno strumento di misura della lunghezza, adatto a misurare (con precisione del ventesimo di millimetro in questo caso) la larghezza di un oggetto, la distanza tra due facce piane in una concavità, la profondità di un solco o foro.

- La formula per calcolare il volume della sfera è: $V = \frac{4}{3} \pi r^3$

- La velocità viene calcolata mediante la formula spazio/tempo

- La formula per calcolare la viscosità del liquido è (dove V è la velocità):

$$\eta = \frac{2gr^2(\rho_{sfera} - \rho_{fluido})}{9V_{limite}}$$

la viscosità dinamica si misura in poise (1Poise = 0,1Ns/m²).

Procedura

- Pesare il cilindro graduato sulla bilancia elettronica (abbiamo eseguito tre prove e calcolato la media aritmetica).
- Riempire il cilindro con il liquido (nel nostro caso shampoo) fino i 250 ml.
- Ripesare il cilindro, questa volta con all'interno il fluido.
- Calcolare il peso netto del liquido (quindi la massa) e il volume per poter trovare la densità.
- Misurare con il calibro il diametro delle due sfere e pesarle sulla bilancia.
- Calcolare il volume delle sfere per poter trovare la loro densità.
- Determinare due posizioni sul cilindro tra le quali misurare il moto della sfera (abbiamo scelto 210 e 30, non partiamo da 250 perché il corpo deve raggiungere la velocità di regime) e misurarne la distanza.
- Lasciar cadere la sfera nel fluido e misurare con il cronometro il tempo che impiega a compire il tragitto tra le due posizioni precedentemente stabilite.
- Ripetere l'operazione 5 volte per sfera.
- Raccogliere i dati ricavati dall'esperienza e calcolare la viscosità del liquido.